

問題 1.

問 1.  $\phi(s)$  の根を調べよ.

(1)  $s^2 - s + 1 = 0$

$s = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$  不安定

(2)  $s^2 + 1 = 0$

$s = \pm j$  不安定

(3)  $25(s - 1) + (s + 10)(s - 1)s = \{25 + (s + 10)s\}(s - 1) = (s + 5)^2(s - 1) = 0$

$s = -5, 1$  不安定

問 2. 極零相殺と,  $\phi(s)$  の根に着目せよ.

(1) 不安定な極零相殺が存在.

不安定

(2) 不安定な極零相殺が存在.

不安定

(3)  $(s - 1)(s + 2) + (s + 1) = 0$

$s = -1 \pm \sqrt{2}$  不安定

(4)  $(s - 1)(5s - 1) + 1 = 0$

$s = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5}j$  不安定

問題 2.

問 1. 周波数伝達関数  $P(j\omega)$  は以下で与えられる.

$$P(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega - 1} \quad (1)$$

これより  $|P(j\omega)|$  と  $\angle P(j\omega)$  を求めると, 次のようになる.

$$|P(j\omega)| = \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega - 1|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1 \quad (2)$$

$$\angle P(j\omega) = \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega - 1) \quad (3)$$

$$= \tan^{-1} \omega - (\pi - \tan^{-1} \omega) \quad (4)$$

$$= -\pi + 2 \tan^{-1} \omega \quad (5)$$

次いで,  $\omega = 0, 1, \infty$  についてゲインと位相を求めると, 次のようになる.

$$\omega = 0; |P(j0)| = 1, \angle P(j0) = -180 \text{ [deg]} \quad (6)$$

$$\omega = 1; |P(j1)| = 1, \angle P(j1) = -90 \text{ [deg]} \quad (7)$$

$$\omega \rightarrow \infty; |P(j\infty)| = 1, \angle P(j\infty) \rightarrow 0 \text{ [deg]} \quad (8)$$

したがって,  $P(s)$  のベクトル軌跡は下図のようになる.

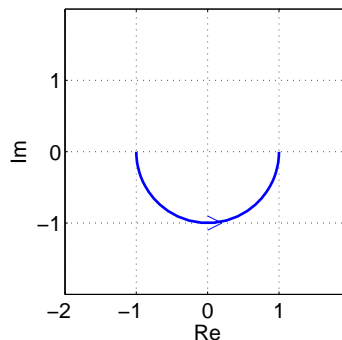
問 2. 問 1. と同様に,  $|C(j\omega)|$  と  $\angle C(j\omega)$  は次のように求められる.

$$|C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad (9)$$

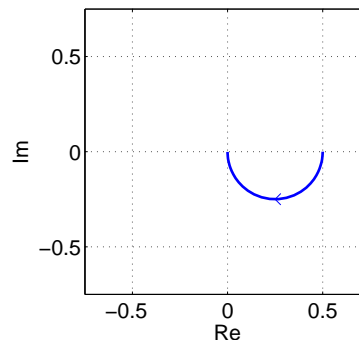
$$\angle C(j\omega) = -\angle(2 + j\omega) \quad (10)$$

$$= -\tan^{-1} \frac{\omega}{2} \quad (11)$$

したがって,  $C(s)$  のベクトルは下図のようになる.



$P(s)$  のベクトル軌跡



$C(s)$  のベクトル軌跡

問 3. 一巡伝達関数の周波数伝達関数  $L(j\omega)$  は, 以下で与えられる.

$$L(j\omega) = kP(j\omega)C(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega)}{(-1 + j\omega)(2 + j\omega)} \quad (12)$$

これより,  $|L(j\omega)|$  および  $\angle L(j\omega)$  は以下で与えられる.

$$|L(j\omega)| = |k| |P(j\omega)| |C(j\omega)| = k \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad (13)$$

$$\angle L(j\omega) = \angle k + \angle P(j\omega) + \angle C(j\omega) \quad (14)$$

$$= -\pi + 2 \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \quad (15)$$

問 4. ゲイン交差角周波数は,  $|L(j\omega)| = 1$  となる角周波数である.

$$|L(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{4 + \omega^2}} = 1 \quad (16)$$

$$\omega_{gc} = \sqrt{k^2 - 4} \quad (17)$$

問 5.  $k = 3$  より,  $\omega_{gc} = \sqrt{5}$  を得る.

$$\angle L(j\sqrt{5}) = -\pi + 2 \tan^{-1} \sqrt{5} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{2} = -96.4 \text{ [deg]} \quad (18)$$

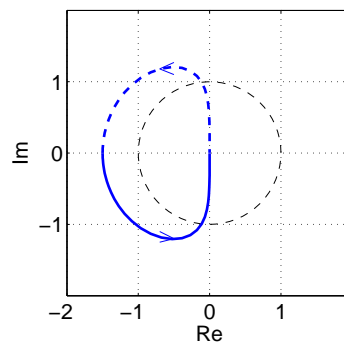
問 6.  $\omega = 0, 1, \infty$  でのゲインと位相は, それぞれ次のようになる.

$$\omega = 0; \quad |L(j0)| = \frac{3}{2}, \quad \angle L(j0) = -180 \text{ [deg]} \quad (19)$$

$$\omega = 1; \quad |L(j1)| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \angle L(j1) = -116.5 \text{ [deg]} \quad (20)$$

$$\omega \rightarrow \infty; \quad |L(j\infty)| \rightarrow 0, \quad \angle L(j\infty) \rightarrow -90 \text{ [deg]} \quad (21)$$

したがって, ナイキスト軌跡は下図のようになる.



ナイキスト軌跡は点  $(-1, 0)$  を反時計方向に 1 回転するから,  $N = -1$ . また, 一巡伝達関数の実部が正である極の数は  $H = 1$ . したがって, 閉ループ系の不安定極の数は

$$Z = N + H = -1 + 1 = 0 \quad (22)$$

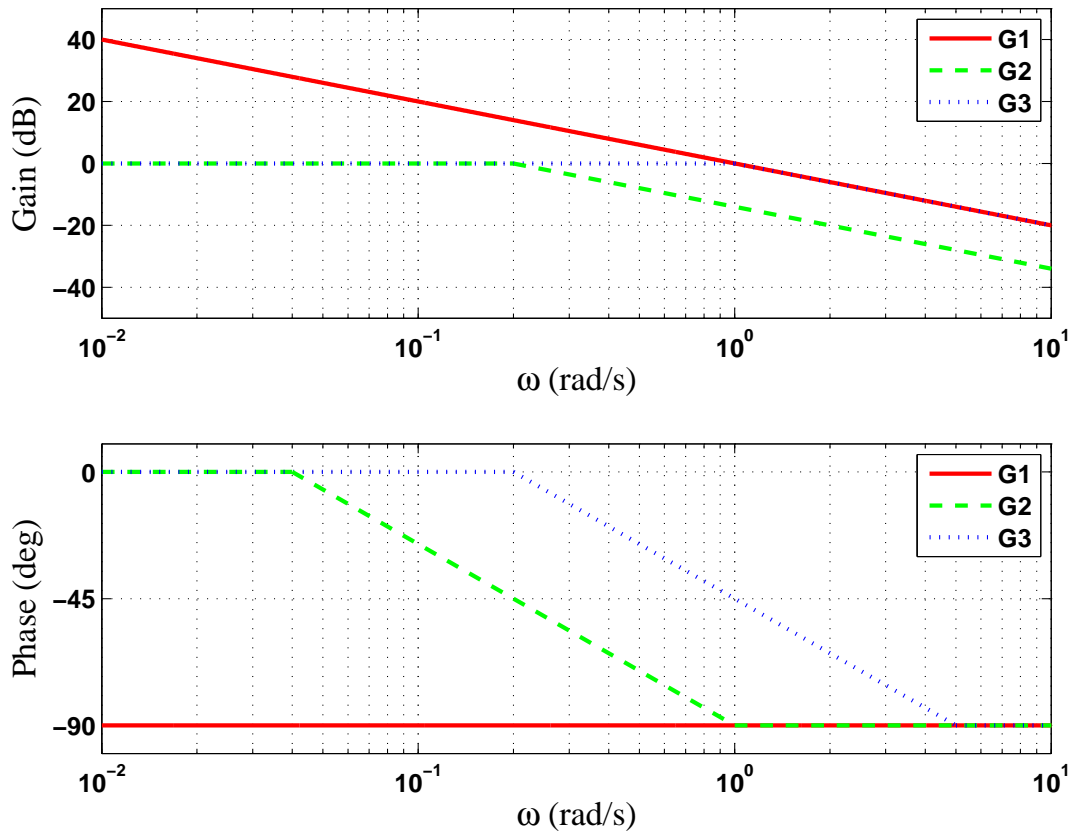
となり,  $k = 3$  において閉ループ系は安定となる.

問 7. 一巡伝達関数は,  $\omega = 0$  [rad/s] のとき負の実軸と交わる. これより,  $\omega = 0$  [rad/s] のとき  $L(j0) = -\frac{k}{2}$  である

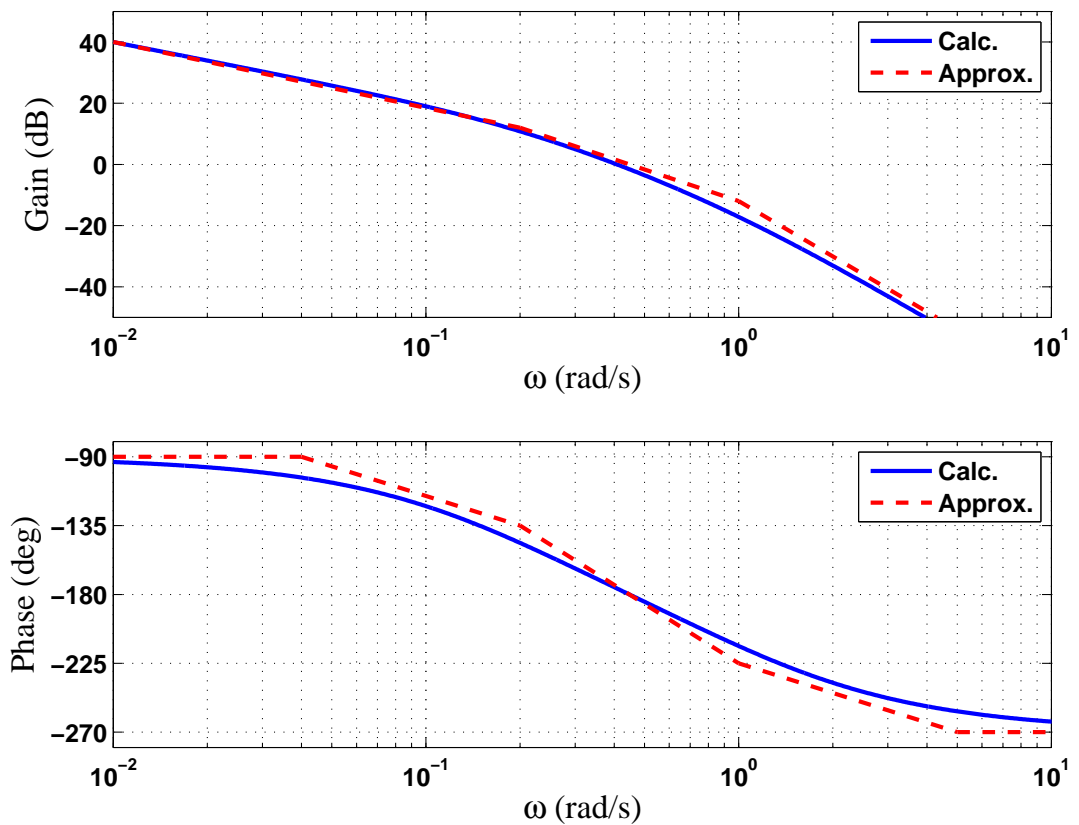
から,  $|L(j0)| = \left| -\frac{k}{2} \right| > 1$  であれば安定性が保たれる. したがって,  $k > 2$  であれば系は安定となる.

問題 3.

問 1.  $G_1(s) = \frac{1}{s}$ ,  $G_2(s) = \frac{1}{5s+1}$ ,  $G_3(s) = \frac{1}{s+1}$  とおくと, それぞれの Bode 線図は下図のようになる.



問 2. 問 1. の結果を重ね合わせることで,  $L(s)$  の Bode 線図は下図のようになる.



問 3.  $L(s)$  の Bode 線図より, 位相交差角周波数  $\omega_{pc} = 0.45$  [rad/s] である. このとき

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{j\omega + 1} \frac{1}{5j\omega + 1} \quad (23)$$

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{25\omega^2 + 1}} \quad (24)$$

$$|L(0.45j)| = \frac{1}{0.45} \frac{1}{\sqrt{0.45^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{25 \times 0.45^2 + 1}} \approx 0.82 \quad (25)$$

$$20 \log |L(0.45j)| \approx 20 \log |0.82| = -1.7 \text{ [dB]} \quad (26)$$

であるから, ゲイン余裕  $GM = 10$  [dB] となる  $K$  は, 次のように求められる.

$$K = -10 - (-1.7) = -8.3 \text{ [dB]} = 10^{-8.3/20} = 0.38 \quad (27)$$

問題 4. ナイキスト軌跡が点  $(-1, j0)$  のまわりを回る回転数を  $N$ , 一巡伝達関数の極の中で実部が正であるものの個数を  $P$  とする.

- (a)  $N = 2, P = 0$  より, 閉ループ系の不安定極の数は  $Z = N + P = 2$ . したがって, フィードバック制御系は不安定.
- (b)  $N = 0, P = 0$  より, 閉ループ系の不安定極の数は  $Z = N + P = 0$ . したがって, フィードバック制御系は安定.
- (c)  $N = 0, P = 0$  より, 閉ループ系の不安定極の数は  $Z = N + P = 0$ . したがって, フィードバック制御系は安定.