17. 切り換えシステムの安定性解析-共通リアプノフ関数による特徴付け-

指導教員：平田 研二 准教授　機械創造工学課程 10308982 増田 瑞喜

1. はじめに

近年,ハイブリッドシステムに注目が集まっている.

ハイブリッドシステム

ハイブリッドシステム:連続ダイナミクスと離散ダイナミクスが混在したシステム

⇓

それぞれ異なるモードを切り換える

ex)

- 切り換えを含む電気回路
- MT車のギア操作

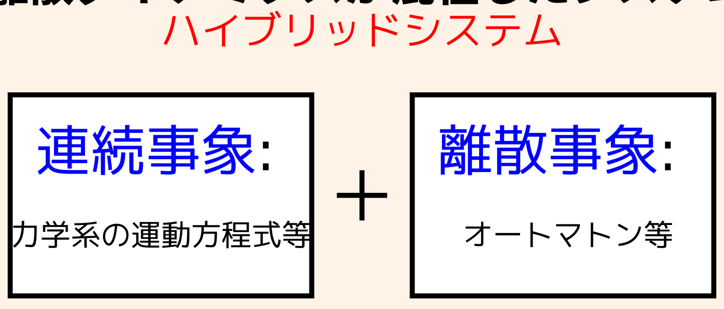

fig.1 ハイブリッドシステム

⇓ハイブリッドシステムの一つのクラス

切り換えシステムの安定解析を行う必要がある.

研究目的

- 共通リアプノフ関数を用いた切り換えシステムの安定解析を行う.
- 共通リアプノフ関数の詳しい特徴付けを行う.

2. 切り換えシステム

切り換えシステム

切り換えシステムの式は以下の通りである.

$$\dot{x} = A_{s(t)}x(t)$$
$$s : [0,\infty) \to \mathcal{P} \qquad (1)$$

- sは有限個の添数集合.
- 零入力システムにおいて内部安定性を考える.

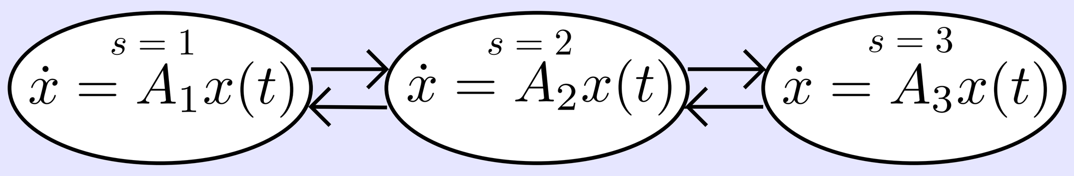

fig.2 切り換えシステム

切り換えシステムは状態に応じてモードを切り換えることで制御性能を向上できる.

⇒切り換えシステムの安定性について考える.

切り換えシステムの安定性

切り換えシステムは個々のシステムが安定であったとしても,システム全体で安定とは限らない.

⇓

システムが共通リアプノフ関数を持つことと,システムの一様指数安定の等価性によりシステム全体の安定性について考える.[1]

3. リアプノフ関数について

リアプノフの安定定理1

システムの解$x(t)$に沿ったスカラー関数$V(x)$が次式

$$V(0) = 0, V(x) \geq 0$$

を満たす正定関数であり,また次式を満たすとき

$$\dot{V}(t) < 0$$

関数Vは負定(準負定)といい,システムは漸近安定(安定)である.

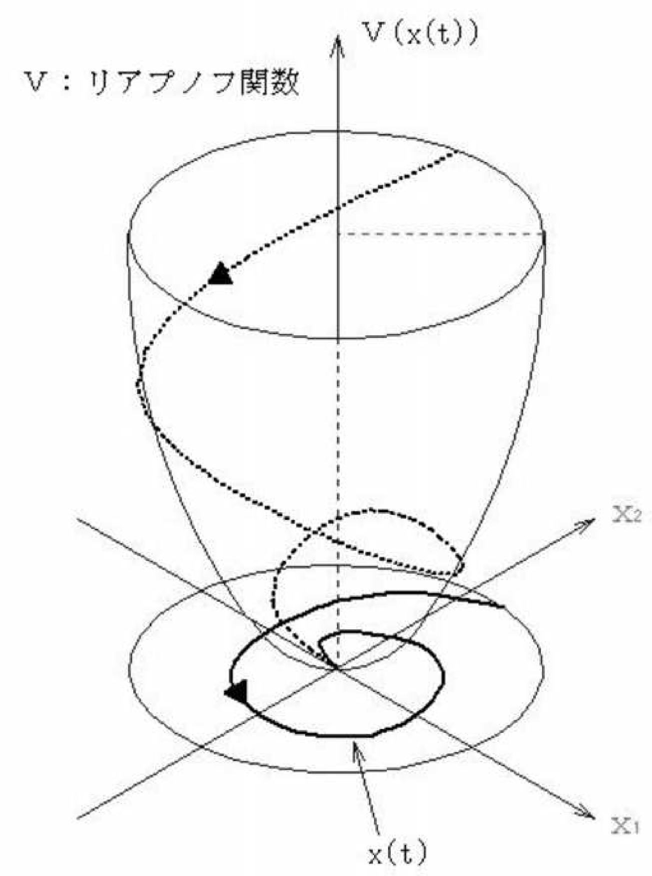

fig.3 リアプノフの安定定理

リアプノフの安定定理2

ex)バネ·ダンパ系,振り子等の力学系の場合

- **システムの解**:変位,角度等の状態変数
- **リアプノフ関数**:力学的エネルギー

力学的エネルギー減少

⇓

状態変数も収束

リアプノフの安定定理を満たす関数$V(x)$

⇒**リアプノフ関数**

共通リアプノフ関数1

(1)式においてすべて$p \in \mathcal{P}$およびほとんどすべてのxに対して

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,A_p x \leq -\epsilon\|x\|^2 \qquad (2)$$

を満たす$\epsilon > 0$が存在し,その正定性が保証されるとき区分的二次関数Vをシステムの**共通リアプノフ関数**と呼ぶ.

共通リアプノフ関数2

区分的二次関数Vの境界の勾配を調べる.

(1) 微分可能点

境界上の点をξ_iとすると

$$勾配 a_j^T = \frac{\partial V}{\partial x}(\xi_j)$$

(2) 微分不可点

$$(a_i^k)^T = \frac{\partial V}{\partial x_i^k}(\xi_j) \quad (k \to \infty)$$

となる点の凸結合で表す.

$$劣勾配 a_j = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i a_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\right)$$

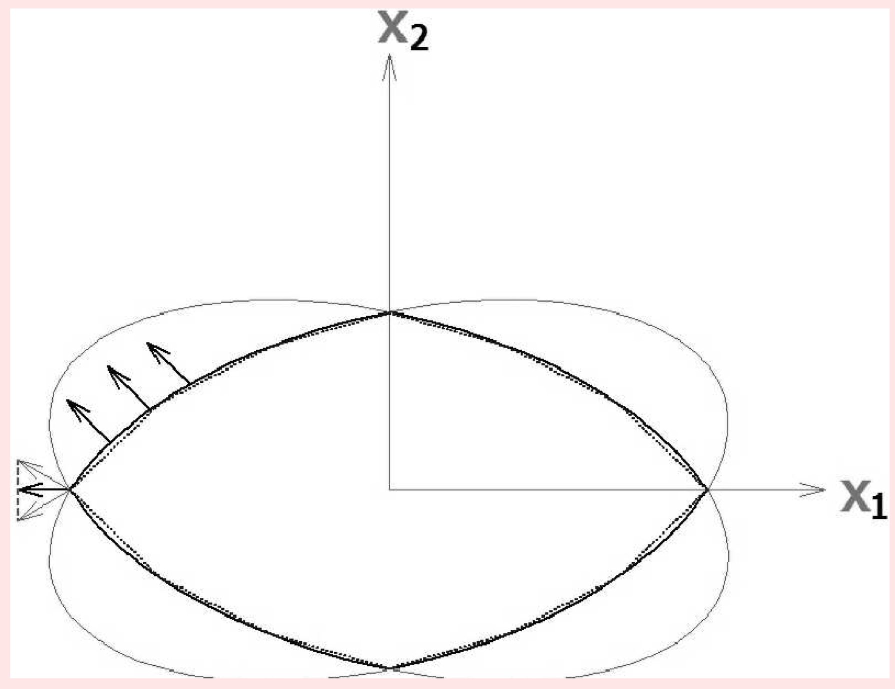

fig.4 共通リアプノフ関数

4. 共通リアプノフ関数の特徴付け

特徴付けの目的

切り換えシステムにおいて,(2)式を満たす共通リアプノフ関数についてさらに詳しく特徴付けを進めていくことで計算機による計算の際に役に立てる.

近似関数v

$M \geq n$を満たす整定数Mおよびrank$[l_1, \cdots, l_M] = n$を満たす定数$l_i \in \mathbb{R}^n$,$i = 1, \cdots, M$が存在し,全ての$p \in \mathcal{P}$およびほとんどのxに対して区分的二次関数

$$v(x) = \max_{i=1,\cdots,M}(l_i^T x)^2 \qquad (3)$$

が(2)を満たす.

- $v(x)$で近似した際の誤差が十分に小さいとき共通リアプノフ関数$V(x)$は近似関数$v(x)$によって近似可能である.

⇓

近似関数$v(x)$での(2)式の成立が証明されれば,共通リアプノフ関数が$l_i(i = 1, \ldots, M)$の有限個のパラメータで表され,より詳しい特徴付けが与えられたことになる.

5. 共通リアプノフ関数による安定性解析

証明

近似関数$v(x)$での(2)式の成立を考えて証明を行うと...

(1) (2)式の左辺

$$(右辺) = \frac{\partial v}{\partial x}(x)A_p x = \frac{\partial\{\max_{i=1,\cdots,M}(l_i^T x)^2\}}{\partial x}(x)A_p x = \cdots$$
$$\cdots = a_j^T A_p x = \frac{\partial V}{\partial x}(x)A_p x$$

→近似前の関数$V(x)$と同様の結果に

(2) (2)式の右辺

→近似関数$v(x)$の影響を受けて誤差が出る

$$(右辺) = -k\epsilon\|\xi_i\|^2 \leq -k\epsilon\frac{r}{\alpha_1} \qquad \leftarrow\downarrow右辺を関数の正定性を用いて書き直すと$$
$$= -\frac{k\epsilon}{\alpha_1}\frac{1}{\theta_j}r = -\frac{k\epsilon}{\alpha\theta_j}v(x)$$
$$\leq -\frac{k\epsilon}{\alpha_1\theta_j}\beta_2\|x\|^2 \leq -\acute{\epsilon}\|x\|^2 \qquad \leftarrow新たに\acute{\epsilon}が定義される$$

→(1),(2)より近似化の影響より生まれる右辺の誤差を許容すれば新たに正定数$\acute{\epsilon}$が定義され,近似関数$v(x)$が(2)式を満たす.

⇓

共通リアプノフ関数が有限個のパラメータで特徴付けられた.

6. 参考文献

[1] K.Hirata,J.P.Hespanha “ L_2-induced Gains of Switched System ”

[2] 小林真人,“ 正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの安定解析 ”