23. 正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの安定性解析

指導教員：平田 研二 准教授　機械創造工学課程 09303482 小林 真人

1. はじめに

ハイブリッドシステム に注目が集まっている

⇓ 一つのクラス

切り換えシステム の安定性解析を行う

応用例
- ハードディスクのヘッド制御
- ロボットの二足歩行制御

切り換え信号全体を有するシステムの安定性解析はすでに行われた

個々のクラスの切り換え信号を有するシステムの安定性解析は有用

⇓ 正則なクラスの切り換え信号に注目

正則な切り換え信号なら信号全体と同様の方法で安定性解析が行える

システムへの入力0の安定性解析⇒内部安定性解析を考える

目的

正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの内部安定性解析

2. 切り換えシステム

切り換えシステム

切り換えシステム
$\dot{x}(t) = A_{s(t)}x(t)$
$\{A_p | p \in \mathcal{P}\}$

区分的に一定な切り換え信号
$s : [0, \infty) \to \mathcal{P}$
すべての切り換え信号は右連続

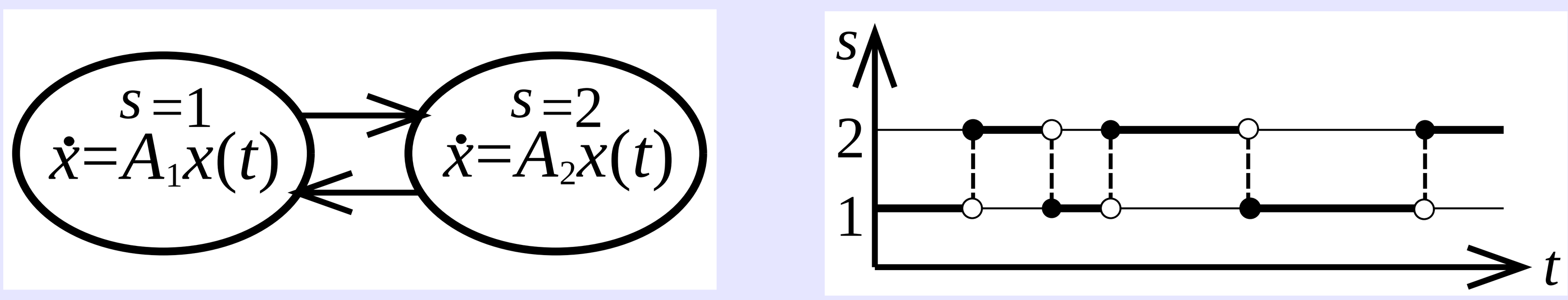

Fig.1　2つのシステムの切り換え

3. 正則な切り換え信号

切り換え信号全体

$\mathcal{S} = \{s : [0, \infty) \to \mathcal{P}\}$

- 任意の有限な時間区間において有限個の切り換え点のみをもつ
- 隣りあう切り換え点の間では定数値をとる

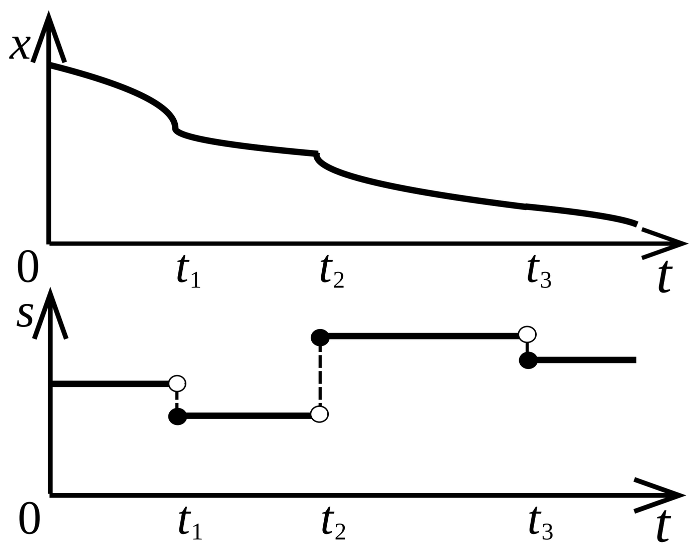

Fig.2 切り換えシステムの応答

正則な切り換え信号

切り換え信号全体$\mathcal{S}$の部分集合である正則なクラスの切り換え信号を$\mathcal{S}'$とし,正則なクラスの切り換え信号の定義を以下に示す

定義　正則な切り換え信号

- どの$p \in \mathcal{P}$に対しても$s^p = p$(一定)は$\mathcal{S}'$に含まれる
- 切り換え信号は時間移動において不変である
- 切り換え信号は連接の下で閉じられている

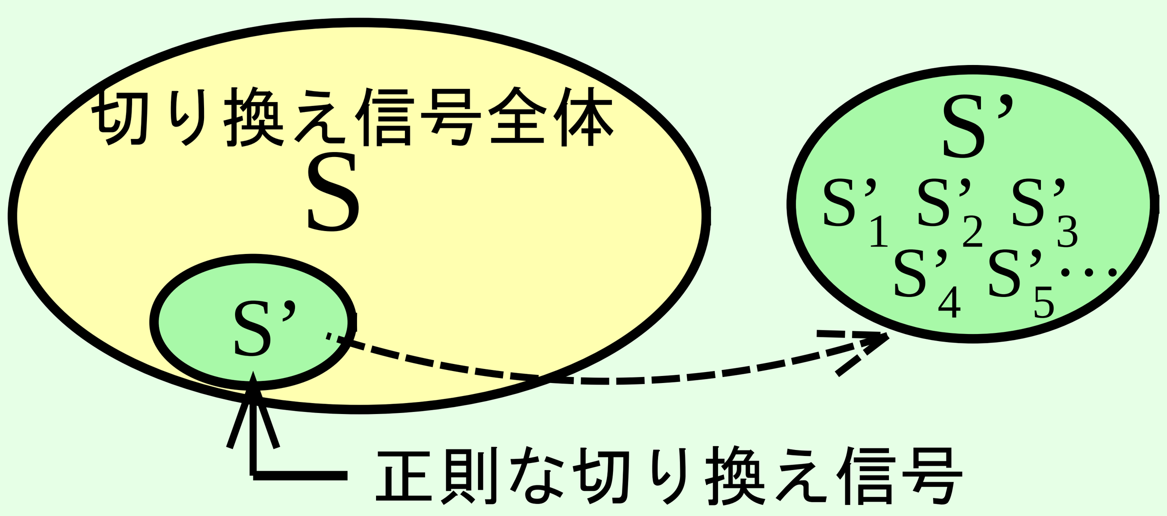

Fig.3 切り換え信号のクラス

切り換え信号が時間移動不変

切り換え信号をある時刻から移動させ新しい切り換え信号を作成したとき元の切り換え信号と同じクラスであるなら時間移動において不変

$\mathcal{S}'[0, \infty) = \Sigma_t \mathcal{S}'[t, \infty)$

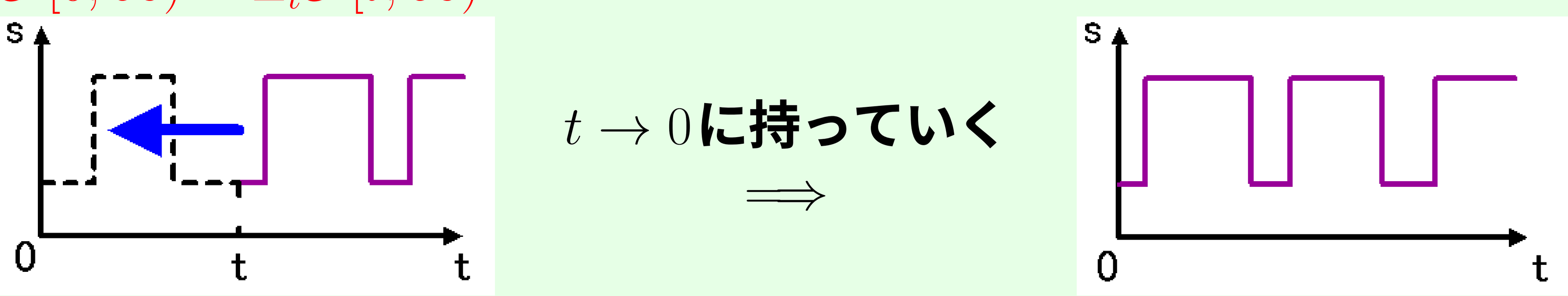

Fig.4 切り換え信号 $\Sigma_t \mathcal{S}'[t, \infty)$

切り換え信号が連接の下で閉じられている

同じクラスの切り換え信号を組み合わせ新しい信号を作成したとき元の切り換え信号と同じクラスであるなら連接の下で閉じられている

$\mathcal{S}'[0, \infty) = \mathcal{S}'[0, t) \oplus \mathcal{S}'[t, \infty)$

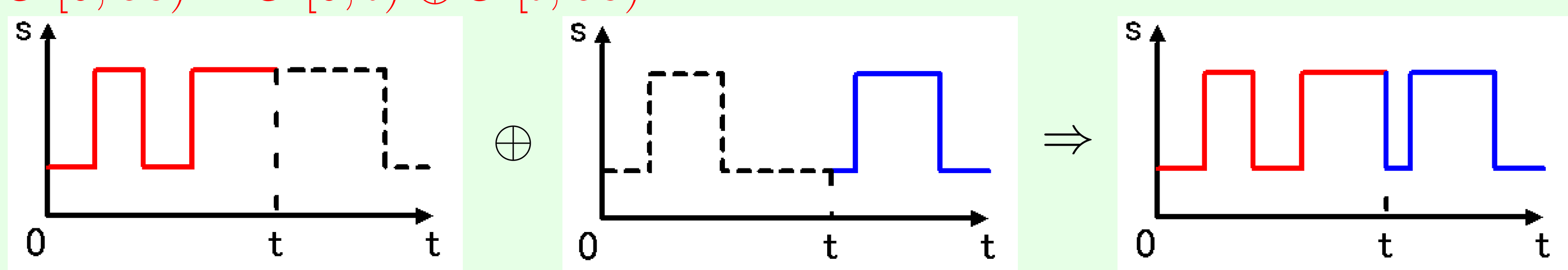

Fig.5 切り換え信号 $\mathcal{S}'[0, t) \oplus \mathcal{S}'[t, \infty)$

4. 共通Lyapunovによる内部安定性解析

共通Lyapunov関数

定義　共通Lyapunov関数

$V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ x \neq 0$のときすべての$p$に対して

$\frac{\partial V}{\partial x}(x) A_p x(t) \leq -\epsilon \| x(t) \|$

を満たす$\epsilon > 0$が存在するとき$V(x)$を共通Lyapunov関数と呼ぶ

正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの内部安定性定理

定理　正則な切り換え信号$\mathcal{S}'$上で切り換えシステムはa),b),c)が等価

a) 切り換えシステムの原点は一様漸近安定

b) 切り換えシステムの原点は一様指数安定

c) $V(0) = 0$,半径方向に非有界で$\dot{V} < 0$な共通Lyapunov関数を持つ

内部安定性の必要条件

S'上で切り換えシステムが一様指数安定であるとき

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq v(x) \leq \alpha_2 \|x\|^2 \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt}(x(t)) \leq -\|x(t)\|^2 \qquad (2)$$

を満たす関数$v(x)$と正定数α_1, α_2が存在することを示す

必要条件の証明

$v(x) = \sup_{s \in \mathcal{S}'} v(x, s) = \sup_{s \in \mathcal{S}'} \lim_{t \to \infty} \int_0^t \| x(\tau) \|^2 d\tau$を定義

(1)　一様指数安定と切り換え信号がどのpでも$s^p = p, p \in \mathcal{P}$と選べることを利用すれば$\alpha_1, \alpha_2$が存在し$v(x)$が(1)式を満たす

(2)　積分区間を$[0, t)$と$[t, \infty)$に分け切り換え信号s, μとする
$\| x(\tau) \|^2$の解を$\Phi(\tau; x, 0, s)$のように書く

$v(x) = \sup_{s \in \mathcal{S}'[0,t)} \int_0^t \Phi(\tau; x, 0, s) d\tau$

$+ \sup_{\mu \in \mathcal{S}'[t, \infty), s \oplus \mu \in \mathcal{S}'} \int_t^\infty \Phi(\tau; \phi(t; x, 0, s), t, \mu) d\tau$

⇑ 定義(連接の下で閉じられている)より不要

$= \sup_{s \in \mathcal{S}'[0,t)} \int_0^t \Phi(\tau; x, 0, s) d\tau + \sup_{\mu \in \Sigma_t \mathcal{S}'[t, \infty)} \int_0^\infty \Phi(\tau; \Phi(t; x, 0, s), 0, \mu) d\tau$

⇑ 定義(時間移動で不変)より不要

$= \sup_{s \in \mathcal{S}'[0,t)} \int_0^t \Phi(\tau; x, 0, s) d\tau + \sup_{\mu \in \mathcal{S}'} \int_0^\infty \Phi(\tau; \Phi(t; x, 0, s), 0, \mu) d\tau$

$= \sup_{s \in \mathcal{S}'[0,t)} \int_0^t \| x(\tau) \|^2 d\tau + v(x(t))$

平均値を用いた積分とテイラー展開を行うと$v(x)$が(2)式を満たす

切り換えシステムが共通Lyapunov関数が持つことを示した

5. まとめ

正則な切り換え信号を有する切り換えシステムに対して内部安定性定理を証明行い,内部安定性解析を行った