24. 切り換えシステムに関する研究

指導教員：平田 研二 准教授 機械創造工学課程 10308982 増田 瑞喜

1. はじめに

近年,ハイブリッドシステムに注目が集まっている.

ハイブリッドシステム

連続ダイナミクスと離散ダイナミクスが混在したシステムのことである.連続事象とは,力学系の運動方程式等に相当し,離散事象はコンピュータのプログラミング等で実現されるオートマトン等に相当する.オートマトンにより,それぞれ異なる常微分方程式を割り当てたモードを切り換えるシステム.

- ロボットの二足歩行制御
- 切り換えを含む電気回路

⇓ハイブリッドシステムの一つのクラス

切り換えシステムの安定解析を行う必要がある.

目的

切り換えシステムの内部安定解析を行う.

2. 切り換えシステム

切り換えシステム

切り換えシステムの式は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{s(t)}x(t) \\ s &: [0,\infty) \to \mathcal{P} \end{aligned} \tag{1}$$

- sは有限個の添数集合.
- sは区分的に一定の数値をとる.

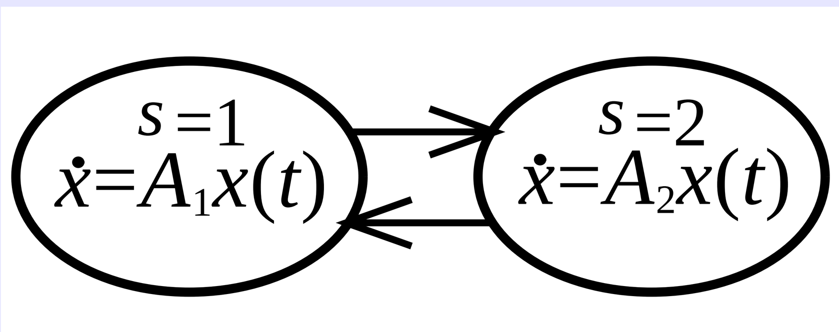

fig.1 切り換えシステム

切り換えシステムは状態に応じてモードを切り換えることで制御性能を向上できる.

⇒切り換えシステムの安定性について考える.

切り換えシステムの安定性

切り換えシステムは個々のシステムが安定であったとしても,システム全体で安定とは限らない.

⇓

システムが共通リアプノフ関数を持つことと,システムの一様指数安定の等価性によりシステム全体の安定性について考える.[1]

3. リアプノフ関数について

リアプノフの安定定理1

システムの解$x(t)$に沿ったスカラー関数$V(x)$が次式

$$V(0) = 0, V(x) \geq 0$$

を満たす正定関数であり,また次式を満たすとき

$$\dot{V}(t) < 0$$

関数Vは負定(準負定)といい,システムは漸近安定(安定)である.

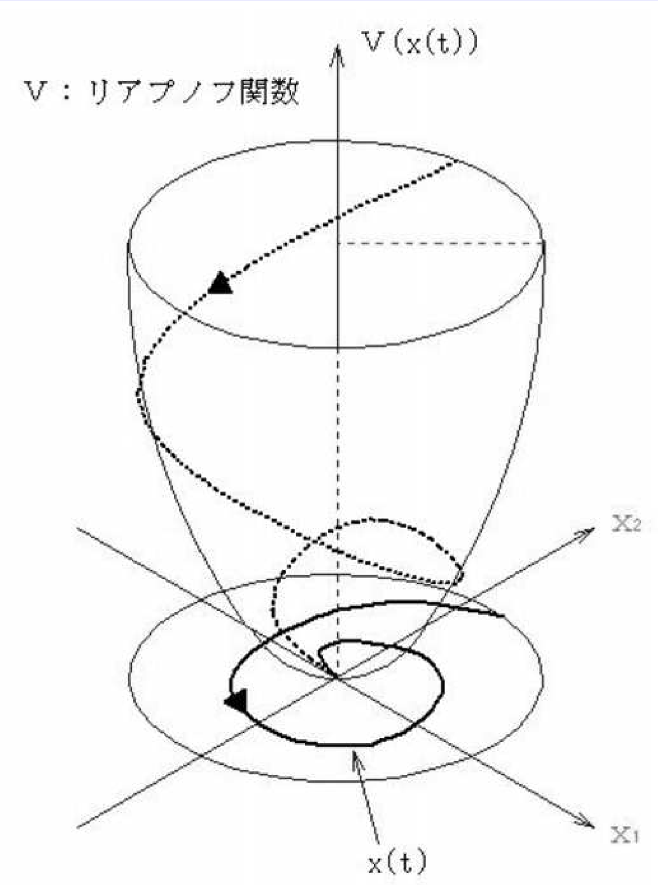

fig.2 リアプノフの安定定理

リアプノフの安定定理2

例としてバネ・マス系や単振子などの力学系を考えた場合,状態変数を$x(t)$とすると,それに沿うスカラー関数Vの候補には力学的エネルギー(運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和)が考えられる.

リアプノフの安定定理はシステムの解そのものを求めることなくシステムの安定性を解析的に求めることができるものである.リアプノフの安定定理を満たす関数$V(x)$をリアプノフ関数と呼ぶ.

共通リアプノフ関数

(1)式においてすべて$p \in \mathcal{P}$およびほとんどすべてのxに対して

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, A_p x \leq -\epsilon \|x\| \tag{2}$$

を満たす$\epsilon > 0$が存在し,その正定性が保証されるとき関数Vをシステムの共通Lyapunov関数と呼ぶ.

(1)式において(2)式の存在とシステムの一様指数安定性は等価である.

⇓ つまり

システムが共通リアプノフ関数を持つことで切り換えシステムの安定性がいえる.

4. 正則な切り換え信号を有する切り替えシステムの安定性

下記に示す内容は文献[2]によって既に厳密な証明が行われているが,切り替えシステムに関する研究の学習の一環としてその内容の理解に取り組んだ.

正則な切り換え信号

切り換え信号全体の定義に加えて,

- 切り換えシステムは時間移動において不変である.
- 切り換えシステムは連接の下で閉じられている.

という定義を与えた,切り換え信号全体の部分集合について考えて,(2)式を満たす共通リアプノフ関数の存在とシステム全体の一様指数安定の等価性を証明を行っている.

証明の手順

- 指数安定性に関する逆定理から
  $$\begin{aligned} \alpha_1\|x\|^2 \leq v(x) \leq \alpha_2\|x\|^2 \\ \frac{dv}{dt}(x(t)) \leq -\|x(t)\|^2 \end{aligned}$$
  を満たす関数$v(x)$と正定数α_1, α_2が存在することを示せば,(2)式を満たす共通リアプノフ関数の存在とシステム全体の一様指数安定の等価性がいえる.
- $v(x) = \sup_{s\in\mathcal{S}'} v(x,s) = \sup_{s\in\mathcal{S}'} \lim_{t\to\infty} \int_0^t \| x(\tau) \|^2 \, d\tau$ を定義することで切り換え信号に依らず一様に証明を行える.
- 上述の正則な切り換え信号の2つの定義を利用する.

⇓

正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの安定性の証明が行われた.

5. 今後の研究の展開

これまでの研究によって

- 切り換え信号全体を有する切り換えシステムの安定解析
- 正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの安定解析

が既に行われている.

課題

切り換えシステムにおいて,(2)式を満たす共通リアプノフ関数についてさらに詳しく特徴付けを行うことで計算機による計算の際に役に立つ.

蓄積関数V

$M \geq n$を満たす整定数Mおよびrank$[l_1,\ldots,l_M] = n$を満たす定数$l_i \in \mathbb{R}^n$,$i = 1,\ldots,M$が存在し,全ての$p \in \mathcal{P}$およびほとんどのxに対して区分的二次関数$V(x) = \max_{i=1,\ldots,M} (l^T x)^2$が(2)を満たす.[3]

⇒ 証明を行う.

システムの一様指数安定性と共通リアプノフ関数の存在の等価性において(2)式を満たすリアプノフ関数が$l_i (i = 1,\ldots,M)$の有限個のパラメータで表わされることが証明されれば,(2)式のリアプノフ関数がより詳しく特徴付けられたことになる.

⇒ 本研究の最終目標とする.

6. 終わりに

- システムの基礎的な内部安定性について学習した.
- 切り換えシステムに関する安定解析について学習した.
- 今後の研究の展開について決定した.

7. 参考文献

[1] K,Hirata and J.P.Hespanha,“ 切り換えシステムの$\mathcal{L}_2$ゲイン解析 ”
[2] 小林真人,“ 正則な切り換え信号を有する切り換えシステムの安定解析 ”
[3] K,Hirata and J.P.Hespanha,“ 切り換えシステムの$\mathcal{L}_2$ゲイン解析における蓄積関数の特徴づけ ”