20　区間演算の活用による制御系の解析

指導教員　平田 研二　助教授　　機械創造工学課程　04111785　松橋 健太

1. はじめに

システムの安定性を調べたい ⇨ 区間演算による解析

具体的には・・・ 安定領域の探索

不変集合とは，初期状態$x_0 \in S$が任意の時刻tで$x(t) \in S$であるときの集合Sのこと

⟹ 不変集合を見つければ安定

非線形システムの安定解析

非線形システムを解を解析的に求めることは一般に難しい

⇩

リアプノフの安定性理論の利用

①システムの平衡点の安定性を調査
②平衡点からどこまでの領域が安定か判別

目的
・非線形システムに対するリアプノフ関数の構成
・多項式計画問題を用いたレベル集合の取得

非線形システムの厳密なリアプノフ関数の導出は困難

⟶ **非線形システムを線形化**

2. リアプノフ関数の構成

◇非線形システムの線形近似システムに基づく安定判別

定理
・非線形システムの原点は指数安定である．
・線形近似システムの原点は指数安定である．
} 等価

2次元離散時間システムの場合

$$x(t+1) = f(x),\quad x = (x_1, x_2)^T,\quad f = (f_1,\ f_2)^T$$

⇩ 原点の近傍における振る舞い

$$x(t+1) = \tilde{A}x(t)$$

ただし，$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$　　$a_{ij} = \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=0}$　　$(i, j = 1,2)$

原点近傍では非線形システムの線形近似化ができる

◇線形近似システムに対するリアプノフ関数の導出

リアプノフ関数とは，$x = 0$ を不動点としたとき

$V(0) = 0$，任意の$x \neq 0$ に対して $\left.\begin{array}{l} V(x(t)) > 0 \\ V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0 \end{array}\right\}$ を満たす関数Vである

リアプノフ関数を2次形式の　$V = x^TPx$ とおくと

$$\begin{aligned} V(x(t+1)) - V(x(t)) &= x(t+1)^T P x(t+1) - x^T P x \\ &= (\tilde{A}x)^T P \tilde{A}x - x^T P x = x^T \tilde{A}^T P \tilde{A} x - x^T P x \\ &= x^T(\tilde{A}^T P \tilde{A} - P)x < 0 \end{aligned}$$

⟶ $\tilde{A}^T P \tilde{A} - P = -Q$　与えられた正定行列Qに対して式を満たす正定行列Pがただ1つ存在する．

正定行列P が求まれば2次形式の $V = x^TPx$ が得られる．

◇数値例

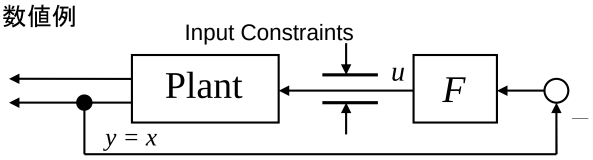

Fig. 1　拘束条件を持つシステム

非線形システム

$$x(t+1) = Ax(t) + \Delta(x(t))Hx(t) + Bu(t)$$
$$z_0 = -u(t) = Fx(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 2 \\ -0.8 & 2 \end{bmatrix}\quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\quad F = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T\quad \Delta(x(t))Hx(t) = \begin{bmatrix} x^T & 0 \\ 0 & x^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.005 \\ 0.01 & 0.02 & 0.005 & 0.01 \end{bmatrix}^T x(t)$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + \Delta(x(t))Hx(t) + B(-Fx(t)) \\ &= \underbrace{(A - BF)x(t)}_{\text{線形項}} + \underbrace{\Delta(x(t))Hx(t)}_{\text{非線形項}} \end{aligned}$$

線形化 ⇨ $x(t+1) = (A - BF)x(t) = \tilde{A}x(t)$　　$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$

$Q = I$（単位行列）として$\tilde{A}^T P \tilde{A} - P = -Q$ を解く

⟶ $P = \begin{bmatrix} 6.8975 & -6.4416 \\ -6.4416 & 9.1417 \end{bmatrix}$　　楕円の式

リアプノフ関数 $V(x(t)) = x^T Px = 6.8975x_1^2 - 2 \times 6.4416x_1x_2 + 9.1417x_2^2$

3. 最適化問題

レベル集合Lv(γ)とは
スカラ関数Vと実数$\gamma \geq 0$に対して$\{x \in R^n \mid V(x) \leqq \gamma\}$なる集合

システムに存在する拘束条件を破らない最大のレベル集合を求めたい

①
拘束条件を考えない安定領域①
max　x^TPx　リアプノフ関数の定義
subject to　$V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0$

⟶ 安定領域がある限り楕円は大きくなっていく．しかも楕円内には不安定な領域を含む．

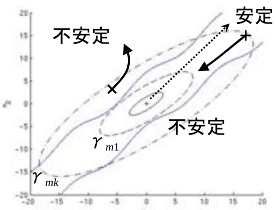

Fig.2　γを大きくしていく場合

②
拘束条件を考えない安定領域②
min　x^TPx　楕円の大きさ＝γ_m
subject to　$V(x(t+1)) - V(x(t)) \geqq 0$

⟶ 不安定領域がなくなる．
楕円は安定な領域のみを含む．
→最大のレベル集合となる．

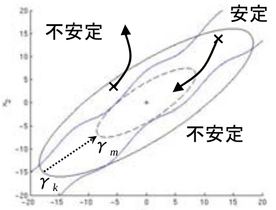

Fig.3　γを小さくしていく場合

③
拘束条件をすべて満たす最大のγ_m
max　x^TPx　拘束条件による制約式
subject to　$M(x) \leqq m$

④
拘束条件をすべて満たす最大のγ_n
min　x^TPx
subject to　$M(x) \geqq m$

⟶ 図より④のほうが正しい

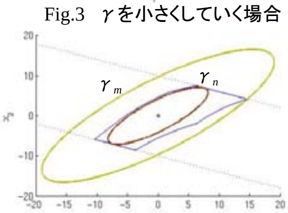

Fig.4　拘束条件を満たすγの決定

⟶ ②と④の小さいγが，拘束条件をすべて満たす最大のレベル集合

4. 結果

MATLABのフリーのツールであるGloptiPolyを使用．
GloptiPolyは多項式計画問題を解くためのツール．
図は数値例を用いた結果．

γ＝探索中
楕円は緑の大きさ以下の予定

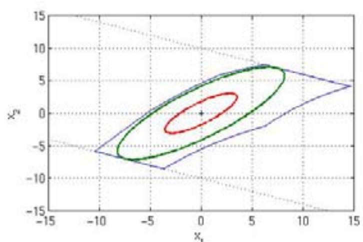

Fig.5　求めたγによる楕円と拘束条件

5. おわりに

・非線形システムの線形化によるリアプノフ関数の構成
・システムの安定領域を与える最適なγの探索

6. 今後の課題

・GloptiPolyを使いこなす．
・多項式計画問題を用いた最適なγの決定．
・求めた不変集合を使った区間演算による安定領域の拡大．